

BSMAT - S301
B.Sc. DEGREE EXAMINATION, OCT./NOV. - 2019
THIRD SEMESTER (CBCS Pattern)
MATHEMATICS
Abstract Algebra
(w.e.f. 2015-16 Admitted Batch)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION - A (5 × 5 = 25)

Answer any Five of the following questions.

1. Show that set Q_+ of all +ve rational numbers forms an abelian group under the composition defined by 'o' such that $aob = ab/3$ for $a, b \in Q_+$.

ధన అకరణీయ సంఖ్య సమితి Q_+ పై 'o' పరిక్రియ $a, b \in Q_+$ కు $aob = ab/3$ గా నిర్వచించబడిన (Q_+, o) ఒక ఎబీలియన్ సమూహము అని చూపండి.

2. In a group G if $a \in G$, then $O(a) = O(a^{-1})$.

G సమూహములో $a \in G$ కు $O(a) = O(a^{-1})$.

3. If H is any subgroup of a group G, then $H^{-1} = H$.

ఒక సమూహము G లో H ఉపసమూహము అయితే $H^{-1} = H$.

4. Any two left cosets of a subgroup are either disjoint or identical.

ఒక ఉపసమూహము యొక్క ఏదైనా ఏడము (కుడి) సహసమితులైనా వియుక్తాలు లేదా సమానాలు.

S-3089

[1]

[P.T.O.]

BSMAT - S301

5. If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G then H is a normal subgroup of G .
G యొక్క సమూహము మరియు G లో H ఉపసమూహము. H ఒక సూచిక (Index) 2 అయితే G లో H అభిలంబ ఉపసమూహము.
6. The homomorphic image of a group is a group prove it.
ఒక సమూహము యొక్క సమరూపతా ప్రతిబింబము కూడా సమూహము అవుతుంది అని నిరూపించండి.
7. Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $[1, \omega, \omega^2]$.
గుణన సమూహము $[1, \omega, \omega^2]$ లో తుల్య రూపత కలిగిన క్రమప్రస్థార సమూహమును కనుక్కోండి.
8. The Quotient group of a cyclic group is cyclic.
ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహము కూడ చక్రీయమగును.

SECTION - B (5 × 10 = 50)

Answer all the following questions.

9. a) Prove that the set of n^{th} roots of unity under multiplication forms a finite group.
1 మొక్క n -వ మూలములతో ఏర్పడిన సమితి గుణకారము దృష్ట్యా ఒక పరిమిత వినిమయ సమూహము అని చూపండి.

BSMAT - S301

OR

- b) In a group G for $a, b \in G$ $o(a) = 5$, $b \neq e$ and $aba^{-1} = b^2$ find $o(b)$.

సమూహము G లో $a, b \in G$ $o(a) = 5$, $b \neq e$, $aba^{-1} = b^2$ అయితే $o(b)$ కనుగొనండి.

10. a) H is a non empty complex of a group G . The necessary and sufficient condition for H to be a subgroup of G is $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ where b^{-1} is the inverse of b in G .

ఒక సమూహము G లో H ఒక శూన్యేతర కాంప్లెక్స్. G లో H ఒక ఉపసమూహము అవలూనికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమము $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. ఇక్కడ b కి H లో విలోమ మూలకము b^{-1} .

OR

- b) State and prove Langrange's theorem.

లెంగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమును నిర్వచించి నిరూపించుము.

11. a) Define Normal subgroup. A subgroup H of a group G is Normal iff $xHx^{-1} = H \forall x \in G$.

అభిలంబ ఉపసమూహము నిర్వచించండి. G లో H అభిలంబ ఉపసమూహం కావలూనికి అవశ్యక పర్యాప్త నియమము $\forall x \in G$ కి $xHx^{-1} = H$.

OR

BSMAT - S301

- b) A subgroup H of a group G is a Normal subgroup of G iff the product of two right cosets of H in G is again a right cosets of H in G .

G లో ఒక ఉపసమూహము H కి ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము $\Leftrightarrow G$ లో H యొక్క రెండు కుడి సహసమితుల లబ్ధము G లో H యొక్క ఒక కుడి సహసమితి.

12. a) State and prove Fundamental theorem on Homomorphism.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూల సిద్ధాంతము నిర్వచించి నిరూపించండి.

OR

- b) The necessary and sufficient condition for a homomorphism f of a group G onto a group G' with kernel k to be an isomorphism of G into G' is that $k = \{e\}$.

సమూహము G నుండి సమూహము G' కు నిర్వచించబడిన సంగ్రహ సమరూపత G నుండి G' కు తుల్యరూపత అగుటకు అవశ్యక పర్యాప్త నియమము $k = \{e\}$ ఇక్కడ $k = \text{ker } f$.

13. a) State and prove Cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతము నిర్వచించి నిరూపించండి.

OR

- b) Every subgroup of cyclic group is cyclic.

చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉప సమూహము చక్రీయము.



BSMAT - S301

B.A./B.Sc. (Second Year) DEGREE EXAMINATION.
OCT/NOV. - 2018

THIRD SEMESTER (CBCS Pattern)

MATHEMATICS

Abstract Algebra

(w.e.f. 2015-2016 Admitted Batch)

Time : 3 Hours

Max. Marks : 75

SECTION - A

(5 × 5 = 25)

Answer any Five of the following questions.

1. Show that the set Q^+ of all positive rational numbers forms an Abelian group under the composition defined by ' \circ ' such that $a \circ b = ab/3$.

ఈ ఆకారంలో సంఖ్య సమితి Q^+ పై ' \circ ' పరిక్రమ $a, b \in Q^+$ కు $a \circ b = ab/3$ గా నిర్వచించబడిన (Q^+, \circ) ఒక వినిమయ సమూహం అని చూపండి.

2. A necessary and sufficient condition for a non-empty complex of a group G to be a subgroup of G is that $HH^{-1} = H$.

ఒక సమూహము G లో H అనే శూన్యేతర కాంప్లెక్స్ G లో ఉపసమూహము అగుటకు నియమము $HH^{-1} = H$ అని చూపుము.

3. Prove that any two right cosets of a subgroup of a group are either disjoint or identical.

ఒక ఉప సమూహము యొక్క ఏదైనా రెండు కుడి సహసమితులైనా వియుక్తాలు లేదా సమానాలు అని చూపుము.

S-311

[1]

[P.T.O.]

BSMAT - S301

4. Prove that every prime order group is simple.

అభాజ్య సంఖ్య తరగతిగా గల సమూహము సరళము అని చూపుము.

5. Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

ఒక సమూహములో రెండు అభిలంబ ఉపసమూహాల ఛేదనము ఒక అభిలంబ ఉపసమూహము అని చూపుము.

6. Prove that every homomorphic image of an Abelian group is Abelian.

ఒక వినిమయ సమూహము యొక్క ప్రతి సమరూపతా ప్రతిబింబము ఒక వినిమయ సమూహము అవుతుందని చూపుము.

7. Compute the regular permutation group isomorphic to

(Z_5^*, x_5) where $Z_5^* = Z_5 - \{0\}$ residue class mod 5 & x_5 is the multiplication module 5.

$Z_5^* = Z_5 - \{0\}$ మాపము 5 దృష్ట్యా అవశేషవర్గాల తరగతుల సమితి అవశేషవర్గ గుణకారం దృష్ట్యా సమూహము (Z_5^*, x_5) లో తుల్యరూపత కలిగిన క్రమప్రస్తార సమూహమును కనుక్కోండి.

8. Prove that the quotient group of a cyclic group is cyclic.

ఒక చక్రీయ సమూహము యొక్క వ్యుత్పన్న సమూహము కూడా చక్రీయము అని చూపుము.

BSMAT - S301

SECTION - B (5 × 10 = 50)

Answer all the following questions.

9. a) Prove that a finite semigroup G satisfying cancellation laws is a group.

నరిమిత అర్థసమూహము G లో కొట్టివేత న్యాయాలు నిజమైన G ఒక సమూహము అవుతుంది అని నిరూపించుము.

OR

- b) If G is a group such that $(ab)^m = a^m b^m$ for three consecutive positive integers $\forall a, b \in G$ then show that (G, \cdot) is an Abelian group.

సమూహము G లో $\forall a, b \in G$ లకు మరియు మూడు పూర్ణాంకాలకు $(ab)^m = a^m b^m$ అయితే G వినిమయ సమూహము అని చూపండి.

10. a) Let H and K be two subgroups of a group G , then prove that HK is a subgroup of G iff $HK = KH$.

ఒక సమూహము G లో H, K లు ఉపసమూహాలు అయితే, HK కూడా G లో ఉపసమూహము కావలెనన్న ఆవశ్యక పర్యాప్త నియమము $HK = KH$ అని చూపుము.

OR

- b) State and prove Lagrange's theorem.

లెగ్రాంజ్ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

BSMAT - S301

11. a) A subgroup H of a group G is normal iff $xHx^{-1} = H$
 $\forall x \in G$.

G లో H అభిలంబ ఉపసమూహము కావటానికి అవశ్యక పరిస్థితి నియమము
 $\forall x \in G$ కి $xHx^{-1} = H$ అని చూపుము.

OR

- b) If G is a group and H is a subgroup of index 2 in G
then prove that H is normal subgroup of G .

G ఒక సమూహము మరియు G లో H ఉపసమూహము. H యొక్క సూచిక
2 అయితే G లో H అభిలంబ ఉపసమూహము అనిచూపుము.

12. a) Let f be a homomorphism from a group G into a
group G' . Then prove that f is monomorphism iff
 $\ker f = \{e\}$.

G సమూహము నుండి G' సమూహమునకు f ఒక సమరూపత అనుకొనుము.
 f ఒక అస్త్యేక సమరూపత $\Leftrightarrow \ker f = \{e\}$ అని చూపుము.

OR

- b) State and prove Fundamental theorem of
homomorphism.

సమూహాల యొక్క సమరూపతా మూల సిద్ధాంతంను ప్రవచించి నిరూపించుము.

13. a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.
చక్రీయ సమూహము యొక్క ప్రతి ఉపసమూహము చక్రీయము అని చూపుము.

OR

- b) State and prove Cayley's theorem.

కెయిలీ సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

